Prirodno-matematički fakultet

Društvo matematičara i fizičara Crne Gore

OLIMPIJADA ZNANJA 2023

Rješenja zadataka iz MATEMATIKE

za VIII razred osnovne škole

1. **(8 poena)** Komad legure bakra i olova mase 60kg sadrži 35% bakra. Koliko olova treba dodati da bi se dobila legura koja sadrži 25% bakra?

   Rješenje: Dodajmo $x$kg olova. Mora važiti $35\%60 = 25\%(60 + x)$. Dobijamo $\frac{35}{100} \cdot 60 = \frac{25}{100}60 + \frac{25}{100}x$, pa je $2100 = 1500 + 25x$. Odavde je $25x = 600$, pa je $x = 24$. Dakle, treba dodati 24kg olova. $\square$

2. **(23 poena)** Brojevni niz formira se na sljedeći način:
   1. prvi član niza je broj 20;
   2. svaki član niza nakon prvog dobijamo kada njegovog prethodnika kvadridamo, saberemo mu cifre i dodamo 1.

   Na primjer, drugi član niza dobijamo: $20^2 = 400$, $4 + 0 + 0 = 4$, $4 + 1 = 5$. Dakle, drugi član niza je 5. Koji broj je na 2023 mjestu u nizu?

   Rješenje: Primijetimo da niz ima sljedeće elemente: 20, 5, 8, 11, 5, 8, 11, ... Dakle, trojka 5, 8, 11 se ponavlja, i svi brojevi na pozicijama $3k+1$ su 11 (osim prvog člana niza), svi brojevi na pozicijama $3k + 2$ su 5, a na pozicijama $3k$ su 8. Kako je $2023 = 2022 + 1 = 3 \cdot 674 + 1$, to je traženi broj 11. $\square$

3. **(23 poena)** Naći cjelobrojna rješenja jednačine $a^2b^2 + a^2 + b^2 + 1 = 2005$.

   Rješenje: Primijetimo da se jednačina može zapisati kao $(1 + a^2)(1 + b^2) = 2005$, a kako je $2005 = 5 * 401$, a 5 i 401 su prosti brojevi, dobijamo da je $a^2 + 1 = 5$ i $b^2 + 1 = 401$ ili obratno. Odavde je $a = \pm 2$ i $b = \pm 20$ ili $a = \pm 20$ i $b = \pm 2$. $\square$

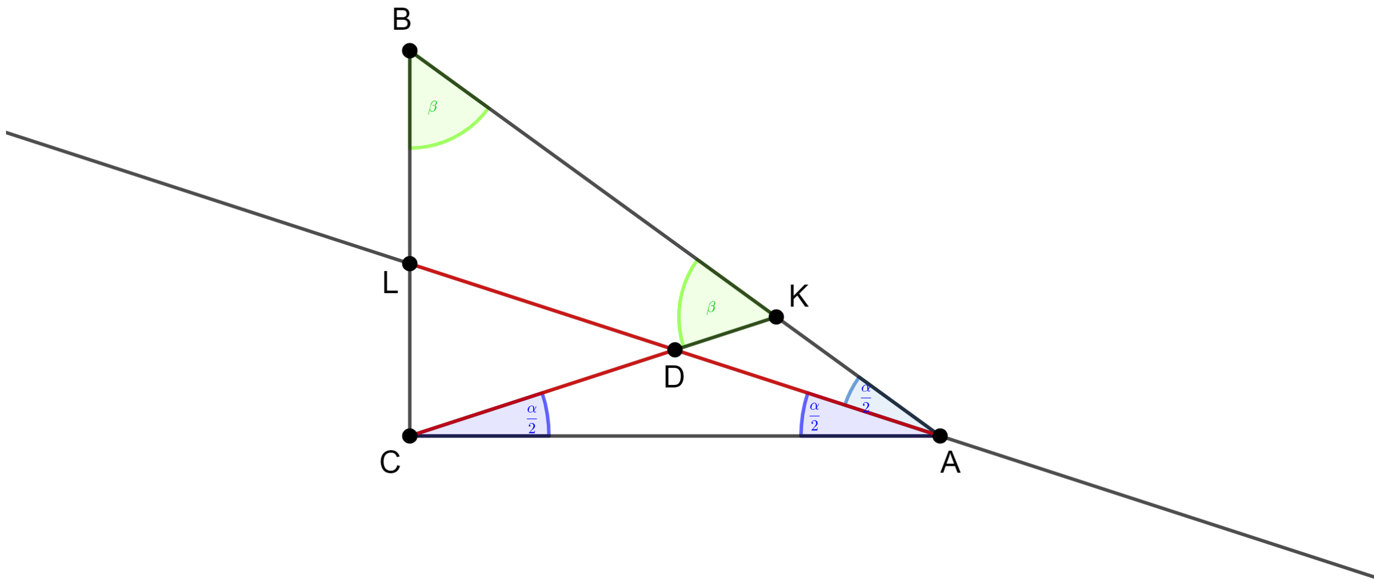
4. **(23 poena)** Igor, Saša i Miša igraju tenis ,,na čekanje". Igra ,,na čekanje" znači da u svakoj partiji igraju dva igrača a treći čeka. Igrač koji izgubi ustupa mjesto dječaku koji je čekao i u sljedećoj partiji on je ,,na čekanju". Poznato je da je Igor odigrao 12 partija, Saša 7 partija, a Miša 11 partija. U koliko partija je Igor pobijedio Sašu?

   Rješenje: Prvo, primijetimo da je odigrano $(12+7+11):2 = 15$ partija. Od toga, Igor **nije** igrao 3 partije, Saša **nije** igrao 8 partija, a Miša **nije** igrao 4 partije. Pošto se u svakoj partiji igrač koji je ,,na čekanju" mijenja, zaključujemo da Saša nije igrao prvu, treću, petu, sedmu, devetu, jedanaestu, trinaestu i petnaestu partiju. Dakle, neparne partije su igrali Igor i Miša, i jedan protiv drugog su odigrali 8 partija. Pošto je Igor igrao ukupno 12 partija, zaključujemo da je sa Sašom igrao četiri, i pobijedio je u svakoj (jer Saša nije igrao u neparnim partijama). Dakle, Igor je pobijedio Sašu četiri puta. $\square$

5. **(23 poena)** Na hipotenuzi AB pravouglog trougla ABC izabrana je tačka K takva da je $BC = CK$. Duž CK polovi simetralnu duž AL ugla CAB. Izračunati uglove u trouglu ABC.

   Rješenje: Označimo $\angle CAB = \alpha, \angle ABC = \beta$. Neka je D presjek duži CK i AL. Trougao ALC je prevougli, i D je sredina njegove hipotenuze, pa je $CD = AD = LD$. Dobijamo da je trougao ADC jednakokraki, pa je $\angle ACD = \angle CAD = \frac{\alpha}{2}$, i $\angle ADC = 180^\circ - \alpha$.

   Dalje, kako je trougao CKB jednakokraki, to je $\angle CKB = \angle KBC = \beta$. Posmatrajmo trougao ADK. Imamo da je $\angle DKA = 180^\circ - \beta$. Pored toga je i $\angle ADK = \alpha$ i $\angle DAK = \frac{\alpha}{2}$, pa dobijamo $\frac{3\alpha}{2} + 180^\circ - \beta = 180^\circ$, odnosno $\beta = \frac{3\alpha}{2}$. Važi i $\alpha + \beta = 90^\circ$, pa dobijamo $\alpha = 36^\circ$, $\beta = 54^\circ$. $\square$



Vrijeme rada: 180 minuta.

Prvi zadatak se boduje sa maksimalno 8 bodova, a ostali sa maksimalno 23 boda.

Rješenja zadataka detaljno obrazložiti.