

Prirodno-matematički fakultet  
Društvo matematičara i fizičara Crne Gore

OLIMPIJADA ZNANJA 2023

MATEMATIKA

za VII razred osnovne škole

1. Odrediti 2023. cifru iza decimalne zapete u decimalnom zapisu broja  $\frac{27}{37}$ .
2. Poslije brisanja trougla  $ABC$  ostala su tjemena  $A$  i  $B$  i ortocentar  $H$ . Ponovo nacrtaj taj trougao.
3. Pretpostavimo da imamo 8 kuglica od kojih su 4 jedne a 4 druge težine. Pomoću vage bez tegova, iz 2 mjerenja izdvojiti dvije kuglice različitih težina. Opisati postupak.
4. Na jednoj pijaci cijene voća u eurima po kilogramu su izražene cijelim prostim brojevima. Pri tome, 6 kg kivija, 5 kg pomorandži, 5 kg jabuka i 3 kg ananasa koštaju 130 eura. Takodje, 130 eura košta 3 kg kivija, 3 kg pomorandži, 5 kg jabuka i 6 kg ananasa. Odrediti cijene svakog voća po kilogramu.
5. U trouglu  $ABC$  ugao kod tjemena  $A$  je  $60^\circ$ . Simetrala stranice  $AB$  siječe pravu  $AC$  u tački  $N$ , a simetrala stranice  $AC$  siječe pravu  $AB$  u tački  $M$ . Dokazati da je  $CB = MN$ .

**Vrijeme rada: 180 minuta.**

**Svaki zadatak se boduje od 0 do 20 poena.**

**Rješenja zadataka detaljno obrazložiti.**

Prirodno-matematički fakultet  
Društvo matematičara i fizičara Crne Gore

OLIMPIJADA ZNANJA 2023

Rješenja zadataka iz MATEMATIKE  
za VII razred osnovne škole

1. Odrediti 2023. cifru iza decimalne zapete u decimalnom zapisu broja  $\frac{27}{37}$ .

**Rješenje:** Razlomak  $\frac{27}{37}$  napišemo kao beskonačni periodični decimalni broj

$$\frac{27}{37} = 27 : 37 = 0,729729729\dots$$

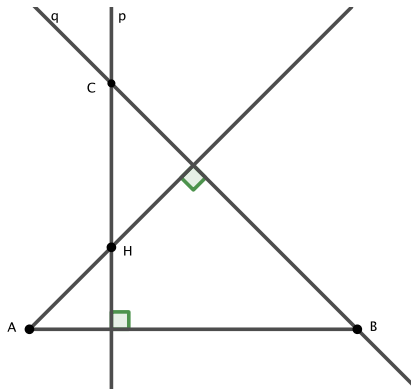
Primijetimo da se grupa cifara 729 periodično ponavlja iza decimalne zapete. Kako je

$$2023 = 3 \cdot 674 + 1$$

to se na 2023. mjestu iza decimalne zapete nalazi cifra 7. □

2. Poslije brisanja trougla  $ABC$  ostala su tjemena  $A$  i  $B$  i ortocentar  $H$ . Ponovo nacrtaj taj trougao.

**Rješenje:** Iz tačke  $H$  konstruisati normalu  $p$  na pravu  $AB$ . Iz tačke  $B$  konstruisati normalu  $q$  na pravu  $AH$ . U presjeku pravih  $p$  i  $q$  nalazi se tačka  $C$ .



□

3. Pretpostavimo da imamo 8 kuglica od kojih su 4 jedne a 4 druge težine. Pomoću vage bez tegova, iz 2 mjerenja izdvojiti dvije kuglice različitih težina. Opisati postupak.

**Rješenje:** Na jedan tas vage stavimo proizvoljne 4 kuglice a na drugi preostale 4 kuglice. Razlikujemo dva moguća slučaja.

1<sup>o</sup> Vaga pokazuje iste težine na oba tasa. To znači da se na prvom tasu nalaze 2 lakše i 2 teže kuglice. Isto je i na drugom tasu. Uzimamo proizvoljne 2 kuglice sa prvog tasa i upoređujemo njihovu težinu sa preostale 2 kuglice sa istog tasa. Ukoliko vaga pokazuje da su jednake težine to znači da se na oba tasa nalaze po jedna laka i jedna teška kuglica, tj. ovim smo našli 2 kuglice različite težine. Ukoliko vaga pokazuje da su težine različite, to znači da su na jednom tasu 2 lake a na drugom 2 teške kuglice. Uzimajući sa svakog tasa po jednu (proizvoljnu) kuglicu izdvojili smo 2 kuglice različitih težina.

2<sup>o</sup> Vaga pokazuje da su na 2 tasa različite težine. Tada se na jednom tasu nalaze 4 lake kuglice ili 3 lake i 1 teška (a na drugom tasu su 4 teške ili 3 teške i 1 laka). Uzimamo proizvoljne 2 kuglice sa tog tasa i upoređujemo njihovu težinu sa preostale 2 kuglice sa istog tasa. Ukoliko vaga pokazuje da su težine iste, to znači da su sve 4 kuglice na vagi iste težine. Uzimajući proizvoljnu jednu kuglicu sa vage i drugu kuglicu od preostalih četiri, izdvojili smo 2 kuglice različitih težina. Ukoliko vaga pokazuje različite težine to znači da su na jednom tasu 2 lake a na drugom tasu 1 laka i 1 teška kuglica i njih izdvajamo kao 2 kuglice različitih težina.

□

4. Na jednoj pijaci cijene voća u eurima po kilogramu su izražene cijelim prostim brojevima. Pri tome, 6 kg kivija, 5 kg pomorandži, 5 kg jabuka i 3 kg ananasa koštaju 130 eura. Takodje, 130 eura košta 3 kg kivija, 3 kg pomorandži, 5 kg jabuka i 6 kg ananasa. Odrediti cijene svakog voća po kilogramu.

**Rješenje:** Označimo svako voće početnim slovom njegovog naziva. Iz uslova zadatka imamo

$$6K + 5P + 5J + 3A = 130$$

$$3K + 3P + 5J + 6A = 130.$$

Izjednačavajući lijeve strane prethodnih jednakosti dobijamo

$$3K + 2P - 3A = 0,$$

tj.  $2P = 3(A - K)$ . Kako je  $P$  prost broj, a desna strana je djeljiva sa 3, to zaključujemo da je  $P = 3$ . Tada je  $A - K = 2$ , tj.  $A$  i  $K$  su prosti brojevi čija je razlika 2. Provjeravamo svaku od mogućnosti uvrštavanjem u jednakosti:

$A = 5, K = 3 \implies 5J = 82$ , što nije moguće jer je  $J$  cijeli broj.

$A = 7, K = 5 \implies 5J = 64$ , što nije moguće jer je  $J$  cijeli broj.

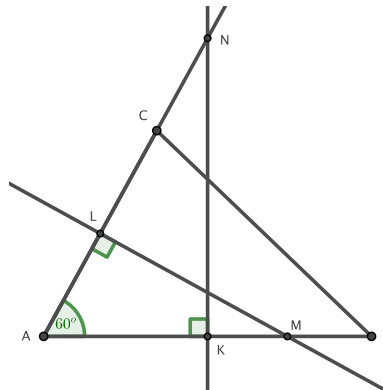
$A = 13, K = 11 \implies 5J = 10$ , odakle zaključujemo da je  $J = 2$ .

$A = 19, K = 17 \implies 5J = -44$ , što nije moguće jer je  $J$  pozitivan cijeli broj (odavde se zaključuje da jednačine neće važiti ni u drugim slučajevima kada je  $A > 19$ ).

Ovim smo dobili da su cijene voća po kilogramu sljedeće: 1 kg kivija je 11 eura, 1 kg pomorandži je 3 eura, 1 kg jabuka je 2 eura i 1 kg ananasa je 13 eura.

5. U trouglu  $ABC$  ugao kod tjemena  $A$  je  $60^\circ$ . Simetrala stranice  $AB$  siječe pravu  $AC$  u tački  $N$ , a simetrala stranice  $AC$  siječe pravu  $AB$  u tački  $M$ . Dokazati da je  $CB = MN$ .

**Rješenje:**



Neka su tačke  $K$  i  $L$  središta stranica  $AB$  i  $AC$ , respektivno. Primijetimo da u trouglovima  $AKN$  i  $ALM$  uglovi iznose  $60^\circ$ ,  $30^\circ$  i  $90^\circ$ . To povlači da je  $AN = 2AK$  i  $AM = 2AL$ . Kako su  $L$  i  $M$  središta stranica  $AC$  i  $AB$ , respektivno, to je  $AN = AB$  i  $AM = AC$ .

Odavde slijedi da trouglovi  $ABC$  i  $ANM$ , osim zajedničkog ugla kod tjemena  $A$ , imaju jednake

stranice koje grade taj ugao. Na osnovu stava *SUS*, slijedi da je  $\triangle ABC \cong \triangle ANM$ , pa je  $CB = MN$ , što je trebalo dokazati.