Prirodno-matematički fakultet

Društvo matematičara i fizičara Crne Gore

OLIMPIJADA ZNANJA 2023

Rješenja zadataka iz MATEMATIKE

za IX razred osnovne škole

1. **(8 poena)** Naći najveći cio broj a za koji je funkcija

$$f(x) = \frac{6}{34+5a}x + 4 - a$$

opadajuća.

Rješenje: Funkcija f je linearna funkcija, i ona je opadajuća ako je koeficijent $k = \frac{6}{34+5a} < 0$. Dobijamo da mora važiti $34 + 5a < 0$, odnosno $a < -\frac{34}{5}$. Najveći cio broj koji je manji od $-\frac{34}{5}$ je $-\frac{35}{5} = -7$, pa je rješenje $a = -7$. $\square$

2. **(23 poena)** Koliko ima četvorocifrenih brojeva koji se završavaju ciframa 19 i koji su djeljivi sa 19?

Rješenje: Posmatramo brojeve oblika $AB19 = AB00 + 19$. Kako je 19 djeljiv sa 19, a $AB00 = AB \cdot 100$, i kako su brojevi 100 i 19 uzajamno prosti, to AB mora biti djeljiv sa 19. Dvocifreni brojevi djeljivi sa 19 su 19, 38, 57, 76 i 95, pa je odgovor 5. $\square$

3. **(23 poena)** Naći sve parove (x, y) prirodnih brojeva za koje važi jednakost $1+x+x^2+x^3 = 2^y$.

Rješenje: Primijetimo jednačina može zapisati kao $(1 + x)(1 + x^2) = 2^y$. Kako je na desnoj strani jednakosti paran broj, zaključujemo da $(1+x)(1+x^2)$ mora biti paran broj, pa x mora biti neparan broj.

Sa desne strane jednakosti je stepen dvojke, pa zaključujemo da važi $1 + x = 2^s$ i $1 + x^2 = 2^r$, gdje je $s + r = y$, $s, r \in \mathbb{N}$. Odavde je $x = 2^s - 1$, pa je $1 + x^2 = 1 + 2^{2s} - 2^{s+1} + 1 =$

$2(2^{2s-1} - 2^s + 1)$. Kako je $2^{2s-1} - 2^s + 1$ uvijek neparan broj, primijetimo da ovaj proizvod može biti stepen broja dva samo ako je $2^{2s-1} - 2^s + 1 = 1$, odnosno ako je $s = 2$, a u tom slučaju je $x = 1$, $y = 2$.

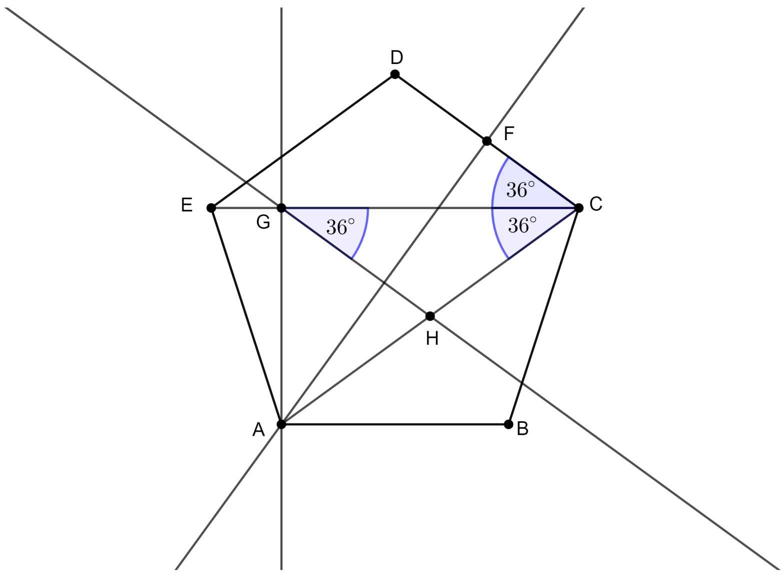
Dakle, jedino rješenje jednačine je $x = 1, y = 2$. □

4. **(23 poena)** Igor, Saša i Miša igraju tenis ,,na čekanje". Igra ,,na čekanje" znači da u svakoj partiji igraju dva igrača a treći čeka. Igrač koji izgubi ustupa mjesto dječaku koji je čekao i u sljedećoj partiji on je ,,na čekanju". Poznato je da je Igor odigrao 12 partija, Saša 7 partija, a Miša 11 partija. U koliko partija je Igor pobijedio Sašu?

   Rješenje: Prvo, primijetimo da je odigrano $(12+7+11) : 2 = 15$ partija. Od toga, Igor **nije** igrao 3 partije, Saša **nije** igrao 8 partija, a Miša **nije** igrao 4 partije. Pošto se u svakoj partiji igrač koji je ,,na čekanju" mijenja, zaključujemo da Saša nije igrao prvu, treću, petu, sedmu, devetu, jedanaestu, trinaestu i petnaestu partiju. Dakle, neparne partije su igrali Igor i Miša, i jedan protiv drugog su odigrali 8 partija. Pošto je Igor igrao ukupno 12 partija, zaključujemo da je sa Sašom igrao četiri, i pobijedio je u svakoj (jer Saša nije igrao u neparnim partijama). Dakle, Igor je pobijedio Sašu četiri puta. □

5. **(23 poena)** Dat je pravilni petougao $ABCDE$. Tačka F je sredina stranice CD, a tačka G je presjek dijagonale CE i simetrale duži AF. Dokazati da je ugao $\angle AGC$ prav.

   Rješenje: Kako su u pravilnom petouglu svi uglovi jednaki $108°$, i kako je trougao CDE jednakokraki, zaključujemo da je $\angle DEC = \angle ECD = 36°$, a kako je i ugao $\angle ACB = 36°$, to je i $\angle ACE = 36°$. Označimo sa H presjek simetrale duži AF i dijagonale AC. Kako je trougao AFC pravougli, simetrala stranice AF je paralelna stranici CF, pa je H sredina hipotenuze AC. Dalje, primijetimo da je $\angle CGH = \angle FCG = 36°$, kao z-uglovi, pa je trougao CGH jednakokraki, odnosno $GH = CH = AH$. Iz ovih jednakosti zaključujemo da je trougao ACG pravougli, i da je ugao kod tjemena G prav. □



Vrijeme rada: 180 minuta.

Prvi zadatak se boduje sa maksimalno 8 bodova, a ostali sa maksimalno 23 boda.

Rješenja zadataka detaljno obrazložiti.